DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 6

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

On note C l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes définies et continues sur $[0, +\infty[$. Pour tout nombre réel $a > 0$, on note C_a le sous-espace vectoriel de C constitué des fonctions nulles en dehors de $[0, a]$. Enfin, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on note E_α le sous-espace vectoriel de C constitué des fonctions f telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{\alpha t}\, dt$ soit convergente.

On se propose d'étudier la fonction Tf, qui, à un nombre complexe $z = x + iy$, associe :

$$(1) \qquad Tf(z) = \int_0^{+\infty} e^{tz} f(t)\, dt,$$

lorsque cette intégrale converge, et de relier les propriétés de Tf à celles de la suite $(M_n(f))_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$(2) \qquad M_n(f) = \int_0^{+\infty} t^n f(t)\, dt,$$

lorsque ces intégrales convergent.

On rappelle que, pour toute fonction f à valeurs complexes continue sur $[0, a]$, il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0, a]$.

I. ÉTUDE DU CAS OÙ f APPARTIENT À C_a

Dans toute cette partie, a est fixé. Pour tout élément f de C_a, les intégrales (1) et (2) portent alors sur l'intervalle $[0, a]$.

1. ***Propriétés de*** $M_n(f)$.

Soit f un élément de C_a. On pose $\gamma = \int_0^a |f(t)|\, dt$.

a. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$|M_n(f)| \leqslant \gamma\, a^n.$$

b. On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $M_n(f) = 0$.

Établir que $\int_0^a |f(t)|^2\, dt = 0$; pour cela, on pourra approcher $\overline{f}$ par une suite de polynômes.

En conclure que $f = 0$.

c. Prouver, plus généralement, que si $M_n(f) = 0$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors $f = 0$.

2. ***Régularité de*** Tf ***sur l'axe réel.***

Soit f un élément de C_a. Dans cette question, on étudie la fonction $x \longmapsto Tf(x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que Tf est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier $p \geqslant 0$,

$$D^p(Tf)(x) = \int_0^a e^{ixt} (it)^p f(t)\, dt.$$

b. Établir que, pour tout nombre réel x et pour tout $p \geqslant 0$,

$$|D^p(Tf)(x)| \leqslant \gamma\, a^p.$$

c. En déduire que le rayon de convergence de la série de Taylor de Tf est égal à $+\infty$ et que la somme de cette série est égale à Tf sur $\mathbb{R}$.
Exprimer les coefficients de cette série en fonction des nombres $M_n(f)$.

3. ***Injectivité de*** T.

Soit f un élément de C_a. Montrer qu'il est équivalent de dire :

a. La fonction f est nulle ;

b. La fonction Tf est nulle sur $\mathbb{C}$;

c. La fonction Tf est nulle sur $\mathbb{R}$;

d. Pour tout $n \geqslant 0$, $M_n(f) = 0$;

e. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $M_n(f) = 0$.

4. ***Comportement asymptotique de*** Tf ***sur*** $\mathbb{R}$.

Soit f un élément de C_a.

a. On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
Prouver que, pour tout nombre réel x,

$$T(Df)(x) = -ixTf(x).$$

En déduire que Tf admet pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. On suppose seulement que f est continue sur $[0, +\infty[$. Prouver que Tf admet pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$; pour cela on pourra approcher f par une suite de polynômes.

c. Prouver que, si f est de classe C^n sur $[0, +\infty[$, $Tf(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{|x|^n}$ lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$.

5. ***Étude de*** Tf ***dans le plan complexe.***

Soit f un élément de C_a.

a. Prouver que, pour tout nombre complexe $z = x + iy$,

$$|Tf(z)| \leqslant \gamma e^{a|y|}.$$

b. Établir, en développant $z \longmapsto e^{izt}$ en série entière, que, pour tout nombre complexe z,

$$Tf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} M_n(f) z^n$$

et que le rayon de convergence de cette série entière est égal à $+\infty$.

c. En déduire que, plus généralement, étant donné un nombre complexe z_0, la fonction qui à tout nombre complexe h associe $Tf(z_0 + h)$ est somme d'une série entière de la variable h dont le rayon de convergence est $+\infty$. Pour cela, on pourra appliquer le résultat de la question *b.* à la fonction $t \longmapsto e^{itz_0} f(t)$.

d. Soit z_0 un nombre complexe tel que $Tf(z_0) = 0$. Montrer que, si $f \neq 0$, il existe un disque de centre z_0 tel que, pour tout élément z de ce disque distinct de z_0, $Tf(z) \neq 0$.

e. Établir finalement que si $f \neq 0$, alors, pour toute partie bornée P de $\mathbb{C}$, l'ensemble des zéros de Tf appartenant à P est fini.

II. ÉTUDE DU CAS OÙ f APPARTIENT À E_α

On note P_α le demi-plan constitué des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $y \geqslant -\alpha$.

Étude de $M_n(f)$.

Soit f un élément de E_α. On pose $\gamma = \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{\alpha t}\, dt$.

a. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, l'intégrale $M_n(f)$ est absolument convergente.

b. Établir que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$|M_n(f)| \leqslant \gamma \left(\frac{n}{\alpha}\right)^n e^{-n}.$$

2. ***Étude de*** Tf ***dans le plan complexe.***

Soit f un élément de E_α.

a. Prouver que, pour tout élément z de P_α, l'intégrale $Tf(z)$ est absolument convergente et que Tf est continue sur P_α. À cet effet on pourra introduire la suite de fonctions $(T_n f)$ définies sur P_α par $T_n f(z) = \int_0^n e^{zt} f(t)\, dt$.

b. Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles positives telle que $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, e^{\alpha t}\, dt$ converge. Prouver que, pour tout nombre réel β tel que $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$,

$$\int_0^{+\infty} e^{\beta t} \varphi(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n(\varphi)}{n!} \beta^n, \tag{3}$$

cette série étant convergente. Pour cela, d'une part, on établira que, pour tout $p \geqslant 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{\beta t} \varphi(t)\, dt \geqslant \sum_{n=0}^{n=p} \left(\int_0^{+\infty} t^n \varphi(t)\, dt \right) \frac{\beta^n}{n!}$$

et que, d'autre part, pour tout $A > 0$,

$$\int_0^{A} e^{\beta t} \varphi(t)\, dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^n \varphi(t)\, dt \right) \frac{\beta^n}{n!}.$$

c. En déduire que, si $|z| \leqslant \alpha$,

$$Tf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{M_n(f)}{n!} z^n,$$

et que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à α.

d. Prouver, plus généralement, que, pour tout élément $z_0 = x_0 + iy_0$ de P_α tel que $\delta = y_0 + \alpha > 0$, la fonction $h \longmapsto Tf(z_0 + h)$ est, pour $|h| \leqslant \delta$, somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à δ.

e. Déduire de tout ce qui précède que si, pour tout $n \geqslant 0$, $M_n(f) = 0$, alors, pour tout élément z de P_α, $Tf(z) = 0$.

Pour cela, on pourra introduire l'ensemble Z des éléments z de P_α satisfaisant à la condition suivante : il existe un disque ouvert de centre z contenu dans P_α tel que Tf soit nulle sur ce disque ; on prouvera alors que Z est ouvert et fermé dans P_α.

3. ***Effet d'un changement de variable.***

Soit f un élément de E_α. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose : $L_n(f) = \int_0^{+\infty} e^{-nu} f(t)\, dt$.

On note g la fonction définie et continue sur $]0, 1]$ par $g(u) = f\left(\frac{-\ln u}{\alpha}\right)$

a. Prouver que l'intégrale $\int_0^1 |g(u)|\, du$ est convergente. Lorsque $n \geqslant 1$, exprimer $L_n(f)$ en fonction de $M_{n-1}(g)$.

b. Soit h une fonction continue sur $]0, 1]$ telle que $\int_0^1 |h(u)|\, du$ converge.

Pour tout entier $p > 0$, on note ψ_p la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\begin{cases} \psi_p(u) = \dfrac{\overline{h(u)}}{|h(u)| + 1} & \text{si } u \geqslant \dfrac{1}{p} \\ \psi_p \quad \text{constante sur} \quad \left[0, \dfrac{1}{p}\right]. \end{cases}$$

Prouver que $\int_0^1 \frac{|h(u)|^2}{|h(u)| + 1}\, du = \lim_{p \to +\infty} \int_0^1 h(u)\, \psi_p(u)\, du$.

c. On suppose en outre que, pour tout $n \geqslant 0$, $M_n(h) = 0$. Montrer que $h = 0$.

4. ***Injectivité de*** T.

Soit f un élément de E_α.

Prouver qu'il est équivalent de dire :

a. La fonction f est nulle ;

b. Pour tout $n \geqslant 0$, $M_n(f) = 0$;

c. La fonction Tf est nulle sur P_α ;

d. Pour tout $n \geqslant 0$, $L_n(f) = 0$.

Montrer enfin que, si la condition *d.*, ou la condition *b.*, est satisfaite pour $n \geqslant n_0$, alors $f = 0$.

5. ***Application aux fonctions définies sur*** $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction à valeurs complexes, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, e^{\alpha u^2}\, du$ converge, où α est un nombre réel strictement positif.

a. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, l'intégrale $M_n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n f(u)\, du$ est absolument convergente.

b. On suppose que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$M_n(f) = 0.$$

Prouver que $f = 0$.

(On se ramènera aux cas où f est paire, ou impaire, et on utilisera le changement de variable $t = u^2$.)